Page/ Date/

* التكامل *

- Definite Integral التكامل المحدود

* Riemann sums * محاضرة (1)

- قواعد هامة يجب معرفتها :

① $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

② $\sum_{k=1}^{n} a = a \sum_{k=1}^{n} k^0 = na$

③ $1, 2, 3, \ldots, n$ ⟵ متتابعة حسابية (عددية) Arithematic sequence

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

④ $a, a^2, a^3, \ldots, a^n$ ⟵ متتابعة هندسية Geometric sequence

$\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a(1-a^n)}{1-a}$

⑤ Some series

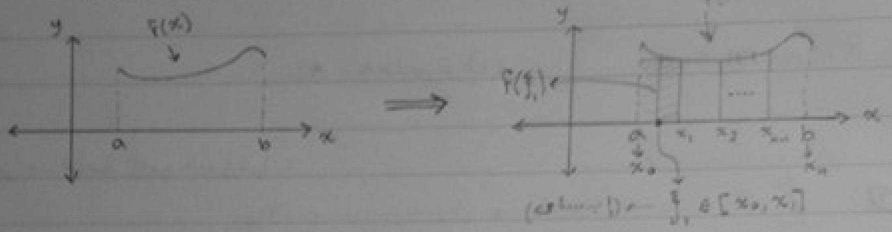
* $\sum_{1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

* $\sum_{1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

→ Riemann sums ← لإيجاد المساحة تحت المنحنى →

متصلة

$f(x) \geq 0$, Continous on $[a,b]$



$\xi_1 \in [x_0, x_1]$ ← (الاختيارية)

← قام Riemann بتقسيم المنحنى إلى شرائح برسم خطوط $x_1, x_2, \ldots, x_n$

وجعل بداية المنحنى x_0 ونهايته x_n ووضع نقطة اختيارية ξ_1

مساحة الشريحة الأولى $A_1 \simeq \underbrace{f(\xi_1)}_{\text{الارتفاع}} \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{\text{العرض}}$

A ← المساحة الكلية

$$A \simeq \sum_{k=1}^{n} \overbrace{f(\xi_k)}^{\text{الارتفاع}} \cdot \overbrace{(x_k - x_{k-1})}^{\text{العرض}} \rightarrow ①$$

$$\text{If} \begin{cases} x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n} \\ \xi_k = x_k \end{cases} \longrightarrow ②$$

العرض متساوي

Inserting ② into ①

∴ Then

$$A \simeq \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n} \rightarrow ③$$

where $x_1 - \underset{\to a}{x_0} = \frac{b-a}{n}$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{n}$$

$$x_2 = a + 2\,\frac{b-a}{n}$$

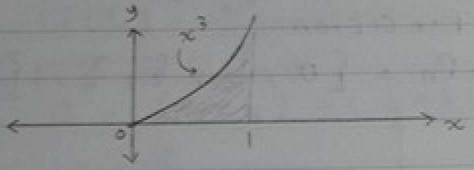
$$x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right) \rightarrow ④$$

Inserting ④ into ③ To get :

$$\text{(المساحة الكلية)} \quad A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Ex. ① Find the area bounded by $f(x) = x^3$, $x=0$, $y=0$ and $x=1$ using Riemann sums

Solution :



$b = 1 \quad , \quad a = 0$

$\therefore \quad b - a = 1$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum \frac{1}{n} \cdot \left(0 + \frac{k}{n}\right)^3$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum \frac{1}{n^4} \cdot k^3$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum k^3$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$A = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{n^2 \cdot n^2}$$

$$A = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

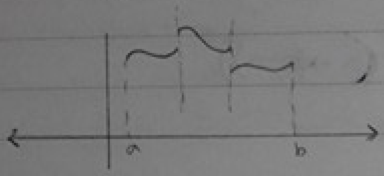
$$\boxed{A = \frac{1}{4}}$$

للتأكد $\longrightarrow$ $\int_0^1 x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4} - 0 = \boxed{\frac{1}{4}}$

Page / Date /

ملحوظة : لتطبيق Riemann يجب أن تكون الدالة Continous متصلة

أو متصلة قطعياً مثل ←

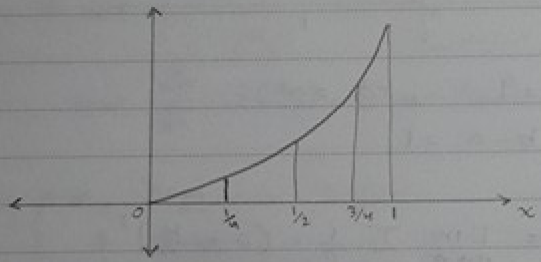


أعلى قيمة (أعلى ارتفاع) ↑ — أقل قيمة (أقل ارتفاع) ↑ — → OR Darboux sums

Ex. ② Find the upper and lower Riemann sums of $f(x) = x^2$ on $[0,1]$ which correspond to the Partition

تقسيم الخطوط معطى → $P_n = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

<u>Solution</u>



① To get upper sums A_1

نختار من كل شريحة النقطة التي عندها أعلى ارتفاع $\boxed{f(x) = x^2}$

	الارتفاع	العرض
$\xi_1 = \frac{1}{4}$	$f(\xi_1) = \frac{1}{4}^2 = \frac{1}{16}$	$\frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$
$\xi_2 = \frac{1}{2}$	$f(\xi_2) = \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
$\xi_3 = 3/4$	$f(\xi_3) = \frac{3}{4}^2 = \frac{9}{16}$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$\xi_4 = 1$	$f(\xi_4) = 1^2 = 1$	$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

أعلى ارتفاع في الشريحة الأولى — عرضها

$$A_1 = \left(\left(\frac{1}{16} * \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} * \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{9}{16} * \frac{1}{4}\right) + \left(1 * \frac{1}{4}\right) \right)$$

$$\boxed{A_1 = \frac{15}{32}}$$

To get the lower sums A_2

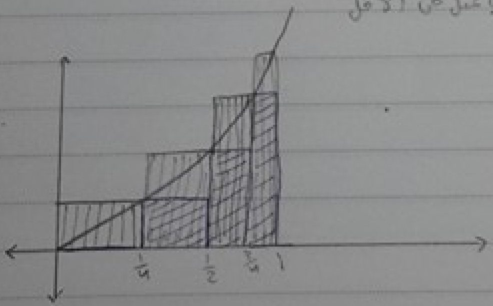
$\xi_1 = 0$	$f(\xi_1) = 0^2 = 0$
$\xi_2 = \frac{1}{4}$	$f(\xi_2) = \frac{1}{4}^2 = \frac{1}{16}$
$\xi_3 = \frac{1}{2}$	$f(\xi_3) = \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4}$
$\xi_4 = \frac{3}{4}$	$f(\xi_4) = \frac{3}{4}^2 = \frac{9}{16}$

أقل ارتفاع في الشريحة الثانية   عرضها

$$A_2 = 0 + \left(\frac{1}{16} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{9}{16} \times \frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{A_2 = \frac{7}{15}}$$

ملاحظة: نختار أقل (x) في كل شريحة لأن الدالة تزايدية فيكون أعلى ارتفاع عند أكبر (x)
وبالمثل مع الأقل



التظليل بالقلم الأزرق ← The lower

〃 الرصاص ← The upper

المساحة الحقيقية

$$A_2 \leq A \leq A_1$$

Page/ Date/

Ex. 3 <u>To You</u>

Evaluate the area bounded by $f(x) = 3x^2$, $x = 1$, $x = 3$ and x axis $y = 0$

using Riemann sums

solution = 26